MATRIKS

Penyusun : Sulistyowati, S.Pd. ; Sumani, S.Pd.
Editor : Drs. Keto Susanto, M.Si. M.T. ; Istijab, S.H. M.Hum.
Imam Indra Gunawan, S.Si.

A. Pengertian Matriks

1. Pengertian Matriks dan Ordo Matriks

Matriks yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari misalnya : tabel matrikulasi di sekolah, penyajian data pada suatu sekolah yang disajikan dalam bentuk matriks, sebagaiberikut.

Contoh : tabel matrikulasi yang memuat data jumlah siswa di suatu sekolah

Tabel Jumlah Siswa

Kelas	Laki-laki	Wanita
I	240	180
II	220	210
III	205	205

Dari tabel di atas, bila diambil angka-angkanya saja dan ditulis dalam tanda siku, bentuknya menjadi $\begin{bmatrix} 240 & 180 \\ 220 & 210 \\ 205 & 205 \end{bmatrix}$. Bentuk sederhana inilah yang kita sebut sebagai matriks.

Pengertian Matriks : Susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom yang diletakkan dalam kurung biasa atau kurung siku.

Matriks dinotasikan dengan huruf kapital (A, B, C), dan sebagainya.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ 13 & 30 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$

Bilangan–bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom tersebut dinamakan elemen / unsur. Elemen matriks A yang terletak di baris ke-2 dan kolom ke-1 dinotasikan sebagai $a_{12}=13$.

Contoh: Berapakah nilai a_{31} dan a_{32}untuk matriks A di atas ?

Jawab: $a_{31}=15$, $a_{32}=25$

Matriks A di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom. Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks menentukan ukuran dari matriks tersebut.

Ordo adalah ukuran suatu matriks yang dinyatakan dalam banyaknya baris kali banyaknya kolom

Jadi matriks A berordo 3 x 2 dan ditulis A_{3x2}

2. Jenis-jenis Matriks

Setelah memahami pengertian matriks dan ordo suatu matriks, siswa dapat diperkenalkan dengan jenis-jenis matriks. Berdasarkan ordonya terdapat beberapa jenis matriks, sebagai berikut :

a. Matrik bujursangkar/persegi yaitu matriks berordo n x n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga sebagai matriks kuadrat berordo n.

Contoh: Matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, maka 1 dan 12 dikatakan berada pada diagonal utama matrik B.

b. Matriks baris yaitu matriks berordo 1 x n atau hanya memiliki satu baris.
Contoh: Matriks $C_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks kolom yaitu matriks berordo n x 1 atau hanya memiliki satu kolom

Contoh: Matriks $E_{2x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

d. Matriks tegak yaitu matriks berordo m x n dengan m>n

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, A berordo 3 x 2 dan 3 > 2 sehingga matriks A tampak tegak

e. Matriks datar yaitu matriks berordo m x n dengan m<n

Contoh: $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, F berordo 2 x 3 dan 2 < 3 sehingga matriks F tampak datar

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat jenis-jenis matriks :

a. **Matriks nol** yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai O.

Contoh: $O_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. **Matriks diagonal** yaitu matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah 0 dan dinotasikan sebagai D.

Contoh: $D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. **Matriks skalar** yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama.

Contoh: $D_{4x4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. **Matriks simetri** yaitu matriks persegi yang setiap elemennya, selain elemen diagonal, adalah simetri terhadap diagonal utama.

Contoh: $F_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. **Matriks simetri** miring yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal, saling berlawanan.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

f. **Matriks Identitas/satuan** yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya adalah 1 dan dinotasikan sebagai I.

Contoh: $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. **Matriks segitiga atas** yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

h. **Matriks segitiga bawah** yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah 0.

Contoh: $H_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

i. **Matriks transpose** yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen kolom dan elemen-elemen kolom menjadi elemen baris. Sebagai pengingat adalah trans = perpindahan dan pose = letak. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^T

Contoh: $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

perhatikan bahwa ordo dari A^T adalah 2 X 3

3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama bila dan hanya bila mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen penyusun yang seletak juga sama.

Contoh: $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka A = B

Perhatikan bahwa $C_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C_{2x3} \neq A_{2x3}$ karena ada elemennya yang seletak dan nilainya tidak sama.

Perhatikan juga bahwa $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ dan $D \neq A$ karena ordo kedua matriks tersebut tidak sama.

B. Operasi Matriks dan Sifat-sifatnya

Dalam menjelaskan operasi hitung pada matriks, kita dapat mengangkat peristiwa sehari-hari atau memberi contoh, sebagai berikut:

1. Penjumlahan Matriks

Prinsip penjumlahan dua atau lebih matriks yaitu menjumlahkan setiap elemennya yang seletak.

Pengertian penjumlahan matriks : Jika A + B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j. Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ maka $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = C$

Perhatikan bahwa C mempunyai ordo sama dengan A dan B

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

a. A+B = B+A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. A+(B+C) = (A+B)+C (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. A+O = O+A

d. $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. Pengurangan Matriks

Operasi pengurangan pada matriks menggunakan prinsip yang sama seperti pada operasi penjumlahan. Matriks A dikurangi matriks B dengan cara mengurangi elemen matriks A dengan elemen matriks B yang seletak.

Pengertian pengurangan matriks : Jika A–B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks ini dapat dipandang sebagai penjumlahan, yaitu A + (-B)

Syarat : Matriks A dan B dapat dikurangkan jika ordo kedua matriks tersebut sama.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A-B = A+(-B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Kaidah ilmu hitung yang berlaku pada pengurangan adalah :

a. A – A = O

b. A – O = A

3. Perkalian Matriks

Operasi perkalian pada matriks ada dua macam yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Sebelum memperkenalkan perkalian matriks dengan matriks, siswa terlebih dahulu diperkenalkan perkalian matriks dengan bilangan/skalar.

a. Perkalian Matriks dengan skalar

Matriks A dikalikan dengan c suatu bilangan/skalar maka cA diperoleh dari hasilkali setiap elemen A dengan c. Dengan demikian, matriks –A dapat dipandang sebagai hasil kali matriks A dengan skalar (–1). Jadi –A = (–1)A.

Berikut ini adalah contoh perkalian matriks dengan bilangan skalar,

Contoh: $P = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ maka $4P = 4\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$

Jika p dan q bilangan real dan B, C dua matriks dengan ordo sedemikian hingga dapat dilakukan operasi hitung berikut, maka berlaku sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar :

1) p (B+C) = pB + pC
2) p (B–C) = pB – pC
3) (p + q) C = pC + qC
4) (a – b) C = pC – qC
5) (pq) C = p (qC)
6) $(pB)^{T} = pB^{T}$

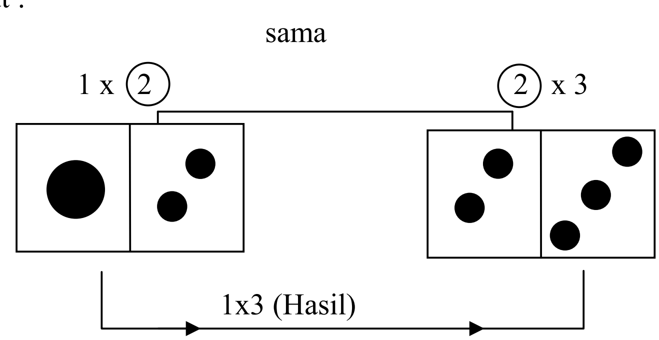
b. Perkalian matriks dengan matriks

Untuk memahami perkalian matriks dengan matriks, kita perhatikan pernyataan berikut. Dua matriks AB dapat dikalikan bila dan hanya bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Jadi $A_{m\times n} \times B_{n\times p}$ bisa didefinisikan, tapi $B_{n\times p} \times A_{m\times n}$ tidak dapat didefinisikan.

$$\underset{mxn}{A} \quad x \quad \underset{nxp}{B} \quad = \quad \underset{mxp}{AB}$$

Perhatikan bahwa hasil kali matriks AB berordo m x p

Untuk menguji apakah dua matriks dapat dikalikan atau tidak dan juga untuk menentukan ordo hasil perkaliannya, dapat juga menggunakan aturan memasang kartu domino sebagai berikut :



Elemen-elemen dari AB diperoleh dari hasil kali setiap baris pada matriks A dengan setiap kolom pada matriks B, kemudian dijumlahkan menjadi satu elemen. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diberikan contoh- contoh perkalian matriks dengan matriks.

Contoh Perkalian Matriks 1 x p dengan matriks p x 1 :

$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$B \times C = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6x4) + (8x7) + (7x2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 \end{bmatrix}$$

Contoh perkalian matriks px1 dengan matriks 1xp:

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x6 & 2x8 & 2x7 \\ 5x6 & 5x8 & 5x7 \\ 4x6 & 4x8 & 4x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 30 & 40 & 35 \\ 24 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

Hasil kalinya merupakan suatu matriks berordo 3x3.

Contoh perkalian matriks mxn dengan matriks nxp:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1x1) + (2x0) & (1x0) + (2x2) & (1x1) + (2x0) \\ (3x1) + (4x0) & (3x0) + (4x2) & (3x1) + (4x0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ hasil perkalian A x C tidak dapat didefinisikan.

Sifat-sifat perkalian matriks dengan matriks :

1) A(BC) = (AB)C
2) A(B+C) = AB + AC
3) (B+C)A = BA + CA
4) A(B–C) = AB–AC
5) (B–C)A = BA–CA
6) a(BC) = (aB)C = B(aC)
7) AI = IA = A

Perlu diingat bahwa bila AB dapat didefinisikan, maka BA belum tentu dapat didefinisikan, sehingga AB belum tentu sama dengan BA.

C. Determinan Matriks

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan. **Pengertian Determinan matriks** adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan det(A).

Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan +1 atau –1. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2 x 2 dan matriks berordo 3 x 3.

1. Determinan matriks berordo 2 x 2

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Contoh: P = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka det(P) = $|P| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (8x4) – (4x3) = 20

2. Determinan matriks berordo 3 X 3

Untuk mencari determinan matriks berordo 3 X 3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut :

a. Metode Sarrus

Jika matriks B = $\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$

maka det(B) = $|B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix}$ = ptx + quv + rsw – rtv – qsx – puw

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\left[\begin{matrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{matrix}\right]\begin{matrix} p & q \\ s & t \\ v & w \end{matrix}$

Perlu diperhatikan bahwa cara demikian **tidak berlaku** bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

Contoh: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka det(Q) = $|Q|$ adalah

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

= (2x3x9) + (4x5x7) + (6x1x8) – (6x3x7) – (2x5x8) – (4x1x9) = 242 –242 = 0

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu siswa dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j.

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

M_{11}, M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks Q.

Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Untuk mencari det(A) dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan det(Q) dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $\det(M_{11}) = -13$, $\det(M_{12}) = -26$ dan $\det(M_{13}) = -13$, maka :

$$|Q| = q_{11}.k_{11} - q_{12}.k_{12} + q_{13}.k_{13}$$

$$= q_{11}.(-1)^{1+1} \det(M_{11}) - q_{12}(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + q_{13}(-1)^{1+3} \det(M_{13})$$

$$= 2.13 - 4.26 + 6.13 = 0$$

Suatu matriks yang nilai determinannya = 0 disebut *matriks singular*.

3. Adjoin Matriks

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan adj $A = (k_{ij})^t$

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa $k_{11} = 13$,

$k_{12} = 26$ dan $k_{13} = 13$ sekarang kita hanya mencari kofaktor dari ekspansi baris ke-2 dan ekspansi baris ke-3, yaitu :

$k_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 12$; $k_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -24$; $k_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 12$

$k_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$; $k_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4$; $k_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 26 & -24 & -4 \\ 13 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Hal yang menarik dalam mencari adjoin matriks berordo 2x2 ditunjukkan sebagai berikut :

Jika $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka kofaktor-kofaktornya adalah $k_{11} = d$, $k_{12} = -c$, $k_{21} = -b$ dan $k_{22} = a$. Kemudian $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Hal ini sama artinya dengan menukarkan elemen-elemen pada diagonal utamanya dan mengubah tanda pada elemen-elemen pada diagonal lainnya

D. Invers Matriks

Untuk menjelaskan invers matriks, perhatikan pengertian berikut:

Invers matriks adalah lawan atau kebalikan suatu matriks dalam perkalian yang dilambangkan dengan A^{-1}.

Definisi:

Jika matriks A dan B sedemikian sehingga A x B = B x A = I , dimana I matriks identitas maka B disebut invers dari A dan A invers dari B.

Karena invers matriks A dilambangkan dengan A^{-1} maka berlaku :

A x A^{-1} = A^{-1} x A = I, dimana I matriks identitas.

Contoh:

Diberikan matriks A= $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

Apakah B adalah invers matriks A ?

<u>Jawab</u>

Karena A x B = $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I dan

B x A = $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I

Maka B adalah invers A ditulis $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

Cara mencari invers matriks berordo 2 x 2 dan invers matriks berordo 3 x 3 dipaparkan berikut ini.

1. Invers matriks berordo 2x2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$.Adj (A)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ ; syarat } \det(A) \neq 0$$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} !

Jawab: det(A) = (5 x 2) – (3 x 3) = 1

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Invers matriks berordo 3x3

Jika B_{3x3}, maka $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}.\text{Adj}(B)$; syarat $\det(A) \neq 0$

Contoh : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,tentukan invers dari matriks segitiga tersebut!

Jawab : Untuk mencari determinan matriks B, cara paling praktis adalah dengan metode kofaktor dengan mengekspansi baris yang memuat nol terbanyak yaitu baris ke-3, maka

$$\det(Q) = |Q| = b_{31}.k31 - b_{32}.k_{32} + b_{33}.k_{33} = 0 - 0 + 6(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

$$\text{Adj B} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat invers matriks :

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

2. Jika AB = BA = I, maka A dan B dikatakan sebagai matriks yang saling invers karena $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$

Bila suatu matriks A mempunyai determinan nol atau det(A) = 0 maka matriks A tidak mempunyai invers. Suatu matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular. Bila det(A)≠0, maka matriks A pasti mempunyai invers. Suatu matriks persegi yang mempunyai invers disebut matriks non singular.

Contoh Soal Aplikasi Matriks

a. Hasil matriks perkalian berikut adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

b. Hasil perkalian matrik berikut adalah:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P \times Q = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 11 & 24 \\ 15 & 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 136 \\ 85 \end{bmatrix}$$

c. Dewi dan teman-temannya memesan 3 mangkok bakso dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, datang Doni dan teman-temannya memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es jeruk. Dewi menantang Amir, seorang siswa SMK non Teknik, untuk menentukan harga bakso per mangkok dan harga es jeruk per gelas jika Dewi harus membayar Rp. 7000,00 untuk semua pesanannya, dan Doni harus membayar Rp. 11.500,00 untuk semua pesanannya itu. Maka berapakah harga bakso per mangkok dan es jeruk per gelasnya?
Petunjuk : Buatlah sistem persamaan linearnya lalu selesaikan dengan matriks.

Jawab:

Misalkan x = harga bakso per mangkok
y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya : $3x + 2y = 7000$
$5x + 3y = 11500$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix} \text{ atau } A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B\text{, maka } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(3.3-5.2)}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-21000+23000) \\ (35000-34500) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Harga bakso Rp. 2000,00 per mangkok dan harga es jeruk Rp. 500,00 per gelas.

Contoh penyelesaian aplikasi matriks pada soal-soal di atas bukanlah satu-satunya cara. Siswa hendaknya diperbolehkan mencari penyelesaian lain selama penyelesaian dibuat dengan logis dan mengikuti kaidah aljabar matriks serta memperoleh hasil sama. Untuk tahap selanjutnya kepada siswa dapat diajarkan tentang persamaan dan pertidaksamaan, baik yang linear atau kuadrat, juga relasi dan fungsi.

Lembar Kerja

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan ordo matriks A dan a_{23} !

2. Sebutkan jenis matriks berikut ini :

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A + B = C^T$, tentukanlah matriks C !

4. Hitunglah perkalian matriks berikut :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

5. Jika A = $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$, maka :

a. Tentukan A^{-1}

b. Tentukan B^{-1}

c. Tentukan A x B

d. Tentukan $(A \times B)^{-1}$

6. Jika P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

a. Tentukanlah PQ

b. Tentukan $P \times \frac{1}{2} Q$

7. Untuk sembarang nilai a carilah nilai x yang memenuhi bila diketahui det(A)=0 untuk matriks :

a. A = $\begin{bmatrix} x & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$

b. A = $\begin{bmatrix} a & 4 \\ a & x \end{bmatrix}$

8. Jika P = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, hitunglah :

a. Det(P)　　b. Det(Q)　　c. Det(PQ)

Apa kesimpulan anda setelah melakukan perhitungan di atas ?

9. Jika $P_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ carilah det(P) dengan menggunakan :

a. Metode Sarrus

b. Metode Kofaktor

10. Tentukan matriks X berordo 2 x 2 yang memenuhi persamaan :

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

c. $X \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

11. Tentukan HP sistem persamaan linear dengan cara matriks $\begin{cases} 3x + 4y = -11 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

12. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan berikut :

a. $\begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 5 \\ x-3y & 5 \end{bmatrix}$

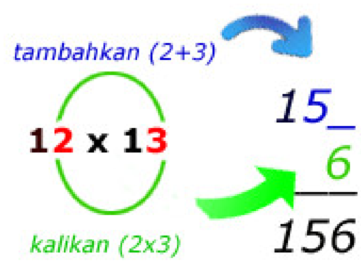
b. $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

== oOo ==

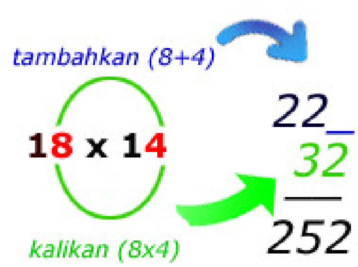
Trik Menghitung 2 Bilangan Belasan

Menghitung perkalian dua angka belasan dapat dilakukan dengan cara konvensional juga dapat dilakukan dengan trik perkalian khusus. Tulisan ini akan membahas bagaimana melakukan perkalian mudah dengan contoh kita akan mencoba perkalian 12×13. Langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Hasil akhir perkalian diasumsikan 100 lebih, jadi asumsikan hasil akhir diawali angka 1.
2. Tambahkan angka satuan dari dua bilangan tersebut yaitu 2+3 nilainya adalah 5. Sekarang kita memperoleh hasil sementara 15_ (1 dari langkah 1, dan 5 dari langkah 2) atau 150 lebih.
3. Sekarang lakukan perkalian angka satuan dari dua bilangan, yaitu 2×3 sehingga nilainya 6.
4. Tambahkan nilai hasil dari langkah 3 dan , yaitu 150+6 sehingga ditemukan nilai akhir.



Untuk angka yang lebih besar, dengan hasil penambahan dan perkalian angka satuan (langkah 2 dan 3) maka angka puluhan ditambahkan dengan ke digit depannya. Misalnya perkalian angka 18×14. Hasil penambahan 8+4 adalah 12. Angka puluhan harus ditambahkan ke digit depannya (yaitu angka 1, lihat langkah 1) sehingga menjadi 22. Hal yang sama dilakukan untuk langkah perkalian 8×4=32.



Semoga Bermanfaat.